ZUR THEORIE DER COMBINANTEN UND ZUR THEORIE DER JERRARD'SCHEN TRANSFORMATION

VON

DR. B. IGEL,

DOCENT AN DER K. K. TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN WIEN

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 10. FEBRUAR 1887.)

In vorliegender Abhandlung wird keineswegs der Versuch gemacht, die Theorie der Combinanten mit der Theorie der Jerrard'schen Transformation in irgend welche Beziehung zu bringen, vielmehr werden diese beiden Gegenstände gesondert behandelt. Und was den Verfasser veranlasst hat, dieselben in eine Arbeit zusammenzufassen, ist die gemeinsame Methode, mit der er sie behandelt und welche darin besteht, die in der Theorie der ein- und mehrstufigen Involutionen geltenden Sätze als Beweismittel zu verwerthen. Der erste Theil dieser Abhandlung beschäftigt sich mit den Combinanten binärer Formen und lehnt sich an die schöne Arbeit von Herrn Brill:[1] „Über die Combinanten und die Gleichung sechsten Grades" an. Die dort behandelten Combinanten werden hier auf ihre natürlicheren Formen gebracht und die dort gegebenen Sätze aus diesen abgeleitet. Auch ergeben sich auf diesem Wege manche Sätze, die Herr Brill ohne Beweis gegeben hat. Anschliessend daran, wird ein von mir in einer früheren Arbeit gegebener Satz verallgemeinert. Der zweite Theil behandelt einige Punkte aus der Theorie der Jerrard'schen Transformation und wurde durch eine Anmerkung in der Abhandlung des Herrn Raths[2] veranlasst. Schon vor zwei Jahren machte ich die Bemerkung, dass die Theorie der Jerrard'schen Form von Hermite nur für den Fall, dass C nicht verschwindet, giltig sein kann und ich stellte mir damals die Frage, ob im Falle $C=0$ die Jerrard'sche Transformation überhaupt möglich, oder ob, wenn sie möglich ist, die Theorie von Hermite nicht allgemein genug sei. Durch verschiedene Umstände wurde ich damals verhindert diese Frage weiter zu verfolgen. Erst bei der Lectüre der Abhandlung von Herrn Raths wurde ich durch die erwähnte Anmerkung auf diese Frage wiederum geführt. Das Resultat meiner Untersuchung geht nun dahin, dass selbst im Falle $C=0$ die Jerrard'sche Transformation möglich, und dass in Folge dessen die Theorie von Hermite nicht umfassend genug ist. Im Anschlusse daran werden noch andere einschlägige Fragen andeutungsweise behandelt, deren ausführlichere Behandlung ich mir für einen anderen Zeitpunkt vorbehalte.

[1] Mathem. Annalen, Bd. 20.

[2] Mathem. Annalen, Bd. 28.

§. 1.

Die Involution $n$ten Grades und $k$ter Stufe studirt man bekanntlich in folgenden zwei Formen. Die eine Form ist:

$$\Phi_1 = f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_k f_k = 0,$$

wenn die f Formen $n$ten Grades sind und die λ Parameter bedeuten. Die andere Form ist:

$$\Phi_2 = \begin{vmatrix} f_0(\lambda_1 \lambda_2) & f_1(\lambda_1 \lambda_2) \cdots f_k(\lambda_1 \lambda_2) \\ f_0(\mu_1 \mu_2) & f_1(\mu_1 \mu_2) \cdots f_k(\mu_1 \mu_2) \\ \cdots & \cdots \\ f_0(\iota_1 \iota_2) & f_1(\iota_1 \iota_2) \cdots f_k(\iota_1 \iota_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese letzte Form ist die analytisch wichtigere, seitdem Herr Gordan den Satz aufgestellt und bewiesen, welcher lautet:

„Die In- und Covarianten von Φ_2, sobald man dieselbe als eine Form von $k+1$ Paaren von Variablen betrachtet, sind die Combinanten der $k+1$ Formen."

Man könnte auch aus der Doppeldarstellung der Involution unter Berücksichtigung, dass ihre beiden Formen dieselbe Beziehung des linearen Gebildes zu dem Gebilde $n$ten Grades darstellen, diesen Satz beweisen. Derselbe ist aber in der letzten Zeit so häufig bewiesen worden, dass es überflüssig scheint, einen neuen Beweis zu geben. Was in diesem Paragraphen gezeigt werden soll, ist dies, dass die Combinanten sich auch in doppelter Form darstellen lassen. Sieht man von der Homogenität der Formen ab und schreibt dieselben wie folgt:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{1\,0} + a_{1\,1}\, x + \cdots + a_{1\,n}\, x^n \\ f_2 &= a_{2\,0} + a_{2\,1}\, x + \cdots + a_{2\,n}\, x^n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (k+1 = p) \\ f_p &= a_{p\,0} + a_{p\,1}\, x + \cdots + a_{p\,n}\, x^n \end{aligned}$$

so ist, wie Herr Brill gezeigt hat,

$$1) \quad \begin{vmatrix} f_1(x_1) \cdots f_p(x_1) \\ f_1(x_2) \cdots f_p(x_2) \\ \cdots\cdots \\ f_1(x_p) \cdots f_p(x_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1\,0} & \cdots a_{p\,0} & X_p & 0 & 0 & 0 \\ a_{1\,1} & \cdots a_{p\,1} & X_{p-1} & X_p & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\,p} & \cdots a_{p\,p} & X_0 & X_1 & & \\ a_{1\,p+1} & \cdots a_{p\,p+1} & 0 & X_0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\,n} & \cdots a_{p\,n} & 0 & 0 & X_0 & \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cdots 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \cdots x_p & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^p & \cdots x_p^p & 0 & 0 & 0 \\ x_1^{p+1} & \cdots x_p^{p+1} & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & \cdots x_p^n & & & 1 \end{vmatrix},$$

wo

$$X_p = x_1 x_2 \ldots x_p, \quad X_{p-1} = -\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{p-1}, \ldots$$
$$X_1 = (-1)^{p-1} \Sigma x_1, \quad X_0 = (-1)^p$$

ist, und

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_i$$

die Summe der Producte der p Grössen

$$x_1, \; x_2 \ldots x_p$$

zu je i bedeutet.

Die zweite Determinante rechts zerfällt in eine $(n-p+1)$-reihige von dem Werthe 1 und eine p-reihige, welche gleich dem Differenzenproducte der x_i ist. Setzt man in 1) die x_i einander gleich x, so erhält man durch einen Grenzübergang

$$2)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots f_p \\ f_1' & f_2' & \cdots f_p' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{p+1} & f_2^{p-1} & \cdots f_p^{p-1} \end{vmatrix} = C \begin{vmatrix} a_{01} & \cdots a_{p0} & x^p & 0 & \cdots \\ a_{11} & \cdots a_{p1} & x^{p-1} & x^p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1p} & \cdots a_{pp} & x^0 & x & \\ a_{1p+1} & \cdots a_{pp+1} & 0 & x^0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots a_{pn} & \cdots & \cdots & x^0 \end{vmatrix},$$

wo C die bekannte Constante bedeutet, der sich die zweite Determinante rechts nähert, wenn man zur Grenze übergeht. Bezeichnet man die Determinante links in 2) mit

$$D(f_1 f_2 \cdots f_p)$$

und setzt

$$\mathfrak{D}(f_1 f_2 \cdots f_p) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{p-1} f_1}{\partial x_2^{p-1}}, & \frac{\partial^{p-1} f_1}{\partial x_2^{p-2}\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} f_1}{\partial x_1^{p-1}} \\ \frac{\partial^{p-1} f_2}{\partial x_2^{p-1}}, & \frac{\partial^{p-1} f_2}{\partial x_2^{p-2}\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} f_2}{\partial x_1^{p-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{p-1} f_p}{\partial x_2^{p-1}}, & \frac{\partial^{p-1} f_p}{\partial x_2^{p-2}\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^{p-1} f_p}{\partial x_1^{p-1}} \end{vmatrix}$$

so ist nach Pasch (Crelle's Journal, Bd. 80)

$$n(n-1)^2(n-2)^3\ldots(n-p+2)^{p-1}\, D(f_1\ldots f_p) = x_2^{\frac{1}{2}p(p-1)}\, \mathfrak{D}(f_1\ldots f_p),$$

folglich kann man auch setzen:

$$3)\qquad \mathfrak{D}(f_1\cdots f_p) = \overline{C} \begin{vmatrix} a_{01}\cdots a_{p0} & x_2^p & 0 \\ a_{11}\cdots a_{p1} & x_2^{p-1}x_1 & x_2^p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1p}\cdots a_{pp} & x_1^p & x_2 x_1^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}\cdots a_{pn} & \cdots & \end{vmatrix}.$$

Diese Darstellbarkeit der Combinante kann man auch auf folgende Weise erschliessen. Wenn man die Form:

$$Com = \begin{vmatrix} a_1^{p-1} & a_1^{p-2}a_2 & \cdots a_2^{p-1} \\ b_1^{p-1} & b_1^{p-2}b_2 & \cdots b_2^{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \iota_1^{p-1} & \iota_1^{p-2}\iota_2 & \cdots \iota_2^{p-1} \end{vmatrix}$$

betrachtet, so sieht man, dass dieselbe nur dann eine reale Form darstellt, wenn die p Formen vom Grade $p-1$ sind. Sind dieselben aber vom Grade p, so stellt sie nur dann eine reale Form dar, wenn man sie mit dem symbolischen Factor

$$a_x b_x \ldots \iota_x$$

multiplicirt, so dass sie die Gestalt hat:

$$Com = (ab)(ac)\ldots(hi)\, a_x b_x \ldots \iota_x$$

Nun ist bekannt, dass diese sich in folgende Determinantenform bringen lässt:

$$=(ab)(ac)\dots(h\iota)\,a_x b_x \dots \iota_x \begin{vmatrix} x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & (-1)^p x_1^p \\ a_1^p & a_1^{p-1}a_2 & \dots & a_2^p \\ b_1^p & b_1^{p-1}b_2 & \dots & b_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \iota_1^p & \iota_1^{p-1}\iota_2 & \dots & \iota_2^p \end{vmatrix}.$$

Daraus lernen wir, dass die Multiplication der Combinante von p Formen mit dem Symbole

$$a_x b_x \dots \iota_x$$

das bewirkt, dass man in der Determinante die Symbole der Coëfficienten um einen Grad erhöht, so dass $p+1$ Colonnen entstehen, und die $(p+1)$te Zeile durch die entsprechenden Potenzen von x_2, x_1 füllt. Bildet man die Form

$$(ab)(ac)\dots(h\iota)\,a_x^2 b_x^2 \dots \iota_x^2 = \begin{vmatrix} x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & (-1)^p x_1^p \\ a_1^p & a_1^{p-1}a_2 & \dots & a_2^p \\ b_1^p & b_1^{p-1}b_2 & \dots & b_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \iota_1^p & \iota_1^{p-1}\iota_2 & \dots & \iota_2^p \end{vmatrix} a_x b_x \dots \iota_x,$$

so bewirkt sonach der Factor $a_x, b_x \dots \iota_x$, dass man die Determinante um eine Zeile und eine Colonne erweitert, indem man die Coëfficienten der Formen um einen Grad erhöht, und in einer Zeile die Potenzen der Variabeln setzt, so dass man schreiben kann:

$$4)\qquad (ab)(ac)\dots(h\iota)\,a_x^2 b_x^2 \dots \iota_x^2 = \begin{vmatrix} x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & (-1)^p x_1^p & 0 \\ & x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & (-1)^p x_1^p \\ a_1^{p+1} & a_1^p a_2 & \dots & & a_2^{p+1} \\ b_1^{p+1} & b_1^p b_2 & \dots & & b_2^{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \iota_1^{p+1} & \iota_1^p \iota_2 & \dots & & \iota_2^{p+1} \end{vmatrix}.$$

Fährt man so fort, so kommt man zu der Form

$$5)\qquad (ab)(ac)\dots(h\iota)\,a_x^{n-p+1} b_x^{n-p+1} \dots \iota_x^{n-p+1} = \begin{vmatrix} x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & (-1)^p x_1^p & & \\ & x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 & \dots & (-1)^p x_1^p & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & x_2^p & -x_2^{p-1}x_1 \dots & (-1)^p x_1^p \\ a_1^n & a_1^{n-1}a_2 & \dots & & & a_2^n \\ b_1^n & b_1^{n-1}b_2 & \dots & & & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \iota_1^n & \iota_1^{n-1}\iota_2 & \dots & & & \iota_2^n \end{vmatrix}$$

was mit der Form 3) übereinstimmt. Wir wollen dies an einem einfachen Beispiele bestätigen. Für $p=3$, $n=4$ sind die simultanen Formen:

$$f_1 = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

$$f_2 = b_0 x_1^4 + 4b_1 x_1^3 x_2 + 6b_2 x_1^2 x_2^2 + 4b_3 x_1 x_2^3 + b_4 x_2^4$$

$$f_3 = c_0 x_1^4 + 4c_1 x_1^3 x_2 + 6c_2 x_1^2 x_2^2 + 4c_3 x_1 x_2^3 + c_4 x_2^4.$$

Bilden wir nun die Form

6) $$\begin{vmatrix} x_2^3, & -3x_2^2x_1 & 3x_2x_1^2, & -x_1^3 & \\ & x_2^3, & -3x_2^2x_1, & 3x_2x_1^2, & -x_1^3 \\ a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 \\ b_0 & 4b_1 & 6b_2 & 4b_3 & b_4 \\ c_0 & 4c_1 & 6c_2 & 4c_3 & c_4 \end{vmatrix},$$

so kann man, wie leicht ersichtlich ist, dieselbe folgendermassen schreiben:

7) $$A\cdot\begin{vmatrix} 4x_2^3, & -3x_2^2x_1 & 2x_2x_1^2 & -x_1^3 & \\ & x_2^3 & -2x_2^2x_1 & 3x_2x_1^2 & -4x_1^3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Multiplieirt man diese Determinante mit folgender, welche gleich x_2^6 ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 & 0 \\ & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ & & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \end{vmatrix},$$

so erhält man, wenn man auf beiden Seiten mit x_2^6 dividirt:

8) $$\begin{vmatrix} x_2^3-3x_2^2x_1 & 3x_2x_1^2 & -x_1^3 & & \\ & x_2^3 & -3x_2^2x_1 & 3x_2x_1^2 & -x_1^3 \\ a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 \\ b_0 & 4b_1 & 6b_2 & 4b_3 & b_4 \\ c_0 & 4c_1 & 6c_2 & 4c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

§. 2.

Mit Hilfe der früheren Auseinandersetzungen gehen wir nun daran, den folgenden Satz zu beweisen, der allerdings in einem viel allgemeineren Satze des Herrn Frobenius enthalten ist, dessen hier zu gebende Beweis dennoch von Interesse ist, einerseits der Methode an sich wegen, und andererseits, weil sich im Verfolge derselben einige interessante Folgerungen ergeben.

Satz.

Bildet man alle Combinanten aus je $p-1$ der p gegebenen Formen

$$f_1(x_1x_2),\ f_2(x_1x_2)\ldots f_p(x_1x_2)$$

und seien diese

$$
9)\qquad C_1=\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-2}f_2}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_2}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_2}{\partial x_2^{p-2}}\\
\frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_2^{p-2}}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_2^{p-2}}
\end{vmatrix},\qquad
C_2=\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_2^{p-2}}\\
\frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_2^{p-2}}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_2^{p-2}}
\end{vmatrix}
$$

. . . .

$$
\cdots C_{p-1}=\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_2^{p-2}}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-2}f_{p-2}}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_{p-2}}{\partial x_2^{p-2}}\\
\frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_2^{p-2}}
\end{vmatrix},\qquad
C_p=\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_1}{\partial x_2^{p-2}}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-2}f_{p-1}}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_{p-1}}{\partial x_2^{p-2}}\\
\frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_2^{p-2}}
\end{vmatrix}
$$

bildet ferner die Jacobi'schen Determinanten aus je zwei derselben, so zerfallen dieselben in zwei Factoren.

Von diesen Factoren ist einer allen gemeinschaftlich, nämlich die aus allen p Formen gebildete Combinante

$$
10)\qquad M=\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-1}f_1}{\partial x_1^{p-1}} & \frac{\partial^{p-1}f_2}{\partial x_1^{p-1}} & \cdots & \frac{\partial^{p-1}f_p}{\partial x_1^{p-1}}\\
\frac{\partial^{p-1}f_1}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2} & \frac{\partial^{p-1}f_2}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-1}f_p}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-1}f_1}{\partial x_2^{p-1}} & \frac{\partial^{p-1}f_2}{\partial x_2^{p-1}} & \cdots & \frac{\partial^{p-1}f_p}{\partial x_2^{p-1}}
\end{vmatrix}
$$

und die anderen Factoren sind die aus je $p-2$ Formen gebildeten Combinanten. Es ist also z. B.

$$
11)\qquad J(C_1\,C_2)=\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-1}f_1}{\partial x_1^{p-1}} & \cdots & \frac{\partial^{p-1}f_p}{\partial x_1^{p-1}}\\
\frac{\partial^{p-1}f_1}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-1}f_p}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-1}f_1}{\partial x_2^{p-1}} & \cdots & \frac{\partial^{p-1}f_p}{\partial x_2^{p-1}}
\end{vmatrix}\times
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^{p-3}f_3}{\partial x_1^{p-3}} & \cdots & \frac{\partial^{p-3}f_p}{\partial x_1^{p-3}}\\
\frac{\partial^{p-3}f_3}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-3}f_p}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^{p-3}f_3}{\partial x_2^{p-3}} & \cdots & \frac{\partial^{p-3}f_p}{\partial x_2^{p-3}}
\end{vmatrix}.
$$

Beweis.

Bildet man die Involution $n$ten Grades und $(p-1)$ten Stufe

$$f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+\ldots+\lambda_p f_p=0$$

und setzt

$$f_1+\lambda_2 f_2=\varphi,$$

so gibt die Gleichung

$$12)\qquad C' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{p-2}\varphi}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_1^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-2}} \\ \frac{\partial^{p-2}\varphi}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_1^{p-3}\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^{p-2}\varphi}{\partial x_2^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2}f_3}{\partial x_2^{p-2}} & \cdots & \frac{\partial^{p-2}f_p}{\partial x_2^{p-2}} \end{vmatrix} = 0$$

die Verschwindungselemente an, für welche die Involution einen $(p-1)$fachen Factor enthält. Setzt man die Discriminante von C' gleich Null, so liefert dieselbe die Werthe für λ_2, nach deren Adjunction die Gleichung $C'=0$ Doppelfactoren enthält. Diese Doppelelemente sind, da $C'=0$ eine Involution erster Stufe ist, nach einem bekannten Satze die Verschwindungselemente der Jacobi'schen Form

$$J(C_1\, C_2).$$

Es muss aber auch für denjenigen Werth von λ_2, der sich unter den Parameterwerthen der Involution befindet, welche es bewirken, dass diese einen p-fachen Factor enthält, $C'=0$ einen Doppelfactor enthalten, wie leicht einzusehen ist, es muss daher $J(C_1\, C_2)$ den Factor M enthalten, da dieser es ist, dessen Verschwindungselemente die p-fachen Factoren der Involution $n$ten Grades und $(p-1)$-Stufe sind. — Damit ist also der erste Theil des Satzes bewiesen.

Da M nur vom Grade $p\,(n-p+1)$ und die Discriminante von C' offenbar in λ von dem Grade ist, von welchem $J(C_1\, C_2)$ in $(x_1\, x_2)$ ist, so folgt daraus der Satz des Herrn Brill:

Die Combinanten haben die Eigenschaft, dass ihre Discriminanten in zwei Factoren zerfallen.

Was nun den zweiten Theil des Satzes betrifft, so kann man denselben beweisen, indem man von den zwei Factoren der Discriminante von M ausgeht. Herr Brill zeigt nämlich, dass der erste Factor U diejenige rationale ganze Function ist, deren Verschwinden aussagt, dass die sämmtlichen n-reihigen Determinanten der folgenden Matrix aus n Vertical- und $(n+1)$ Horizontalreihen für denselben Werth der $x_1\, x_2$ verschwinden:

$$13)\qquad \left\|\begin{matrix} a_{10} & \cdots & a_{p0} & X_{p+1} & 0 & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{p1} & X_p & X_{p+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1\,p+1} & \cdots & a_{p\,p+1} & X_0 & X_1 & \\ a_{1\,p+2} & \cdots & a_{p\,p+2} & 0 & X_0 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & 0 & 0 & X_0 \end{matrix}\right\|,$$

wo zur Abkürzung

$$x_1^{p+1} = X_{p+1}\,;\ -\binom{p+1}{1}x_1^p x_2 = X_p\,, \ldots (-1)^p\binom{p+1}{1}x_1 x_2^p = X_1$$

$$(-1)^{p+1}x_2^{p+1} = X_0$$

gesetzt wird, und dass der zweite Factor C in ähnlicher Weise den gemeinsamen Verschwindungswerth der Determinanten der folgenden Matrix von $(n+1)$ Horizontal- und $(n+2)$ Verticalreihen liefert

$$14)\qquad \left\|\begin{matrix} a_{10} \cdots a_{p0} & X_{p-1} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{11} \cdots a_{p1} & X_{p-2} & X_{p-1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} \cdots a_{pn} & 0 & 0 & \ldots & X_0 \end{matrix}\right\|,$$

wo

$$X_{p-1} = x_1^{p-1}\,,\ X_2 = -\binom{p-1}{1}x_1^{p-2}x_2\,, \ldots X_0 = (-1)^{p-1}x_2^{p-}$$

ist. Für die Combinante C' lautet die zweite Matrix, wenn man die Coëfficienten von φ mit α bezeichnet:

$$\left|\begin{matrix} \alpha_{20} \ldots a_{p0} X_{p-2} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{21} \ldots a_{p1} X_{p-3} X_{p-2} & \ldots & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2n} \ldots a_{pn} & 0 & 0 \ldots & X_0 \end{matrix}\right|.$$

Für die Werthe von λ_2, für welche die Discriminante von C' verschwindet, haben alle Determinanten der Matrix denselben Factor, der zugleich Doppelfactor von C' ist. Bedenkt man, dass dem §. 1 zufolge:

$$15)\quad \left|\begin{matrix} a_{30} \ldots a_{p0} X_{p-2} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} \ldots a_{p1} X_{p-3} & X_{p-2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{3n} \ldots a_{pn} & 0 & 0 \ldots & X_0 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \frac{\partial^{p-3} f_3}{\partial x_1^{p-3}} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_p}{\partial x_1^{p-3}} \\ \frac{\partial^{p-3} f_3}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_p}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{p-3} f_3}{\partial x_1^{p-3}} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_p}{\partial x_1^{p-3}} \end{matrix}\right|$$

ist, so heisst dies, dass denjenigen Werthen von λ_2, für welchen der zweite Factor der Discriminante verschwindet, diejenigen Werthe von x entsprechen, für welche die Determinante rechts verschwindet. Und da diese Werthe auch die Verschwindungselemente von $J(C_1 C_2)$ sind, so folgt somit auch der zweite Theil des Satzes. — Man kann aber diesen Theil des Satzes ohne Voraussetzung des Brill'schen Satzes beweisen, was insofern von Vortheil ist als sich umgekehrt auf diese Weise der zweite Factor der Discriminante von M, der mit demjenigen des Herrn Brill genau übereinstimmt, ergibt, und als auf diese Weise möglich wird, die Grade in den Coëfficienten der beiden Factoren nachzuweisen, die Herr Brill ohne Beweis gegeben. Es seien zwei Involutionen gegeben:

$$f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{p-1} f_{p-1} = 0$$
$$\mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{p-1} f_{p-1} = 0.$$

Sollen die $(p-2)$-fachen Elemente der zweiten Involution die $(p-1)$-fachen der ersten sein, so müssen offenbar alle Hauptcombinanten von je $(p-2)$ Formen für dieselben Werthe verschwinden. Denn aus

$$f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_{p-1} f_{p-1} = (x\alpha)^{p-1} \varphi$$
$$\mu_2 f_2 + \ldots + \mu_{p-1} f_{p-1} = (x\alpha)^{p-2} \psi$$

folgt durch Subtraction

$$\mu_{p-1} f_1 + (\lambda_2 \mu_{p-1} - \mu_2 \lambda_{p-1}) f_2 + \ldots + (\lambda_{p-2} \mu_{p-1} - \lambda_{p-1} \mu_{p-2}) f_{p-2} = (x\alpha)^{p-2} X,$$

d. h.

$$16)\quad \left|\begin{matrix} \frac{\partial^{p-3} f_2}{\partial x_1^{p-3}} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_{p-1}}{\partial x_1^{p-3}} \\ \frac{\partial^{p-3} f_2}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_{p-1}}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{p-3} f_2}{\partial x_2^{p-3}} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_{p-1}}{\partial x_2^{p-3}} \end{matrix}\right| = C \left|\begin{matrix} \frac{\partial^{p-3} f_1}{\partial x_1^{p-3}} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_{p-2}}{\partial x_1^{p-3}} \\ \frac{\partial^{p-3} f_1}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_{p-2}}{\partial x_1^{p-4}\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{p-3} f_1}{\partial x_2^{p-3}} & \ldots & \frac{\partial^{p-3} f_{p-2}}{\partial x_2^{p-3}} \end{matrix}\right|.$$

Dies vorausgeschickt, erinnern wir daran, dass $C'=0$ als diejenige Involution erster Stufe aufgefasst werden kann, welche alle $(p-1)$-fachen Elemente der Involution $n$ten Grades und $(p-2)$ter Stufe darstellt. Setzen wir in $C'=0$ für x_1, x_2 successive die Verschwindungselemente von

17)
$$C'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{p-3} f_3}{\partial x_1^{p-3}} & \cdots & \frac{\partial^{p-3} f_p}{\partial x_1^{p-3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{p-3} f_3}{\partial x_2^{p-3}} & \cdots & \frac{\partial^{p-3} f_p}{\partial x_2^{p-3}} \end{vmatrix} = 0$$

und bestimmen darnach λ_2, was soviel bedeutet, als die Elimination von x_1, x_2 aus $C' = 0$ und $C'' = 0$ so bestimmen wir dadurch die $(p-1)$-fachen Elemente, welche in der Involution $(p-3)$ter Stufe die $(p-2)$-fachen Elemente sind. Aus dem Vorausgeschickten folgt also, dass alle Combinanten, welche aus je $(p-2)$ Formen

$$\varphi, f_3, \cdots fp$$

gebildet sind, für dieselben Werthe verschwinden. Und da dieselben die Unterdeterminanten von C' sind, wie man sich leicht überzeugt, wenn man sie sowohl als auch C' in der Form schreibt, in die sie nach der Formel 2) gebracht werden können, so folgt, dass der Differentialquotient von C' für dieselben Werthe verschwindet, d. h. dass C' die Factoren von C'' doppelt enthält. Damit ist also bewiesen, dass den Werthen von λ_2, für welche C' einen Doppelfactor hat, die Verschwindungselemente von C'' entsprechen und dass da ihnen auch die Verschwindungselemente von $J(C_1 C_2)$ entsprechen, $J(C_1 C_2)$ C'' als Factor enthält. — Zugleich ist auch der zweite Factor der Discriminante von C' ermittelt, welcher genau mit demjenigen des Herrn Brill stimmt. Den Grad in den Coëfficienten der Factoren der Discriminante von C' ermittelt man folgendermassen.

Der Grad der Discriminante in λ muss offenbar demjenigen der x_1, x_2 in $J(C_1 C_2)$ gleich sein, und zwar:

$$= 2\{(p-1)(n-p+2)-1\}.$$

Der Grad in λ desjenigen Factors, dessen Wurzeln den Wurzeln von C'' entsprechen, ist aber gleich dem Grade von C'' in x_1, x_2, nämlich

$$= (p-2)(n-p+3),$$

folglich muss der Grad des andern Factors

$$= p(n-p+1)$$

sein, da

$$2\{(p-1)(n-p+2)-1\} = p(n-p+1) + (p-2)(n-p+3)$$

ist.

Um nun zu den eigentlichen Formeln des Herrn Brill, d. h. zur Bestimmung der Grade der zwei Factoren der Discriminante der Combinante M zu gelangen, hat man in obigen Formeln

$p+1$ an Stelle von p

zu setzen, und erhält den Grad von U, resp. C

18)
$$G_U = (p+1)(n-p)$$
$$G_C = (p-1)(n-p+2).$$

§. 3.

Im vorigen Paragraph hat sich im ersten Theil des Beweises der allgemeine Satz ergeben, dass die Discriminante der Combinante von p Formen $n$ten Grades in zwei Factoren zerfällt. Im zweiten Beweise des zweiten Theiles des Satzes sind wir auf den zweiten Factor geführt worden und auf die Bestimmung der Grade beider Factoren. Und nun wollen wir beide Factoren der Discriminante direct ableiten. Es ist nach dem Vorhergehenden

$$W(x_1 x_2) = \begin{vmatrix} a_{10} & \dots & a_{p0} & X_p & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & \dots & a_{p1} & X_{p-1} & X_p & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} & \dots & a_{pp} & X_0 & X_1 & \dots & \\ a_{1p+1} & \dots & a_{pp+1} & 0 & X_0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{pn} & 0 & 0 & \dots & X_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{p-1} f_1}{\partial x_1^{p-1}} & \dots & \frac{\partial^{p-1} f_1}{\partial x_2^{p-1}} \\ \frac{\partial^{p-1} f_2}{\partial x_1^{p-1}} & \dots & \frac{\partial^{p-1} f_2}{\partial x_2^{p-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{p-1} f_p}{\partial x_1^{p-1}} & \dots & \frac{\partial^{p-1} f_p}{\partial x_2^{p-1}} \end{vmatrix}$$

Ist eine der $p(n-p+1)$ Wurzeln von $W(x_1 x_2)$ ζ_1, ζ_2, so ist dann die Gruppe der Formen:

$$f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_p f_p = \varphi(x_1 x_2)(x_1 \zeta_2 - x_2 \zeta_1)^p.$$

Hat aber die Gruppe einen $(p+1)$-fachen Factor, so müssen alle Gleichungen denselben enthalten, die aus folgendem Rechtecke entstehen

$$19)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^p f_1}{\partial x_1^p} & \frac{\partial^p f_1}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^p f_1}{\partial x_2^p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^p f_p}{\partial x_1^p} & \frac{\partial^p f_p}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^p f_p}{\partial x_2^p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{10} \dots a_{p0} & X_{p+1} & 0 \\ a_{11} \dots a_{p1} & X_p \; X_{p+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1p} \dots a_{pp} & X_1 & \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} \dots a_{pn} & 0 & X_0 \end{vmatrix}.$$

Dieser Factor muss aber offenbar in $W(x_1 x_2)$ doppelt vorkommen, daraus folgt, dass diejenige rationale Function, welche aussagt, dass alle n-reihigen Determinanten der obigen Matrix für denselben Werth verschwinden, ein Factor der Discriminante von $W(x_1 x_2)$ ist. Es ist ferner

$$20)\quad \begin{vmatrix} a_{01} \dots a_{p0} & X_{p-1} & \dots 0 \\ a_{11} \dots a_{p1} & X_{p-2} X_{p-1} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} \dots a_{pn} & 0 & \dots X_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^{p-2} f_1}{\partial x_1^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2} f_2}{\partial x_1^{p-2}} & \dots & \frac{\partial^{p-2} f_p}{\partial x_1^{p-2}} \\ \frac{\partial^{p-2} f_1}{\partial x_1^{p-3} \partial x_2} & \frac{\partial^{p-2} f_2}{\partial x_1^{p-3} \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^{p-2} f_p}{\partial x_1^{p-3} \partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{p-2} f_1}{\partial x_2^{p-2}} & \frac{\partial^{p-2} f_2}{\partial x_2^{p-2}} & \dots & \frac{\partial^{p-2} f_p}{\partial x_2^{p-2}} \end{vmatrix}.$$

Verschwinden alle Determinanten, die aus diesem Rechtecke genommen werden, für denselben Werth, so muss, da dieselben die Unterdeterminanten von $W(x_1 x_2)$ sind und da in Folge dessen der Differentialquotient von $W(x_1 x_2)$, wie oben schon erwähnt wurde, für diesen Werth verschwinden muss, $W(x_1 x_2)$ diese Wurzel doppelt enthalten, d. h. die Resultante jener Gleichungen muss ein Factor der Discriminante von $W(x_1 x_2)$ sein. Damit ist der Satz des Herrn Brill direct bewiesen.

§. 4.

Wir gehen nun zu dem speciellen Fall von vier Formen vierten Grades, mit dem sich besonders Herr Brill beschäftigt, über. Sind dieselben

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x_1^4 + b_1 x_1^3 x_2 + c_1 x_1^2 x_2^2 + d_1 x_1 x_2^3 + e_1 x_2^4 \\ f_2 &= a_2 x_1^4 + b_2 x_1^3 x_2 + c_2 x_1^2 x_2^2 + d_2 x_1 x_2^3 + e_2 x_2^4 \\ f_3 &= a_3 x_1^4 + b_3 x_1^3 x_2 + c_3 x_1^2 x_2^2 + d_3 x_1 x_2^3 + e_3 x_2^4 \\ f_4 &= a_4 x_1^4 + b_4 x_1^3 x_2 + c_4 x_1^2 x_2^2 + d_4 x_1 x_2^3 + e_4 x^4 \end{aligned}$$

und bildet man die zwei Combinanten:

21) $$W_1(x_1 x_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x_1^3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -3x_1^2 x_2 & x_1^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 3x_1 x_2^2 & -3x_1^2 x_2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -x_2^3 & 3x_1 x_2^2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & -x_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_0 x_1^6 + 3\alpha_1 x_1^5 x_2 + (3\alpha_2 + 6\beta_2) x_1^4 x_2^2 + (\alpha_3 + 8\beta_3) x_1^3 x_2^3 + (3\alpha_4 + 6\beta_4) x_1^2 x_2^4 + 3\alpha_5 x_1 x_2^5 + \alpha_6 x_2^6$$

22) $$W_2(x_1 x_2) = \alpha_0' x_1^6 + 3\alpha_1' x_1^5 x_2 + (3\alpha_2' + 6\beta_2') x_1^4 x_2^2 + (\alpha_3' + 8\beta_3') x_1^3 x_2^3 + (3\alpha_4' + 6\beta_4') x_1^2 x_2^4 + 3\alpha_5' x_1 x_2^5 + \alpha_6' x_2^6.$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 & x_1^3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_4 & -3x_1^2 x_2 & x_1^3 \\ c_1 & c_2 & c_4 & 3x_1 x_2^2 & -3x_1^2 x_2 \\ d_1 & d_2 & d_4 & -x_2^3 & 3x_1 x_2^2 \\ e_1 & e_2 & e_4 & 0 & -x_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_4}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = (c\,d\,e) & \alpha_3 = (b\,c\,d) & \beta_2 = (a\,d\,e) \\ \alpha_1 = (b\,d\,e) & \alpha_4 = (a\,c\,d) & \beta_3 = (a\,c\,e) \\ \alpha_2 = (b\,c\,e) & \alpha_5 = (a\,b\,d) & \beta_4 = (a\,b\,e) \\ \alpha_6 = (a\,b\,c) & & \end{array}$$

gesetzt, und z. B.

$$(c\,d\,e) = \Sigma \pm c_1 d_2 e_3$$

ist. Setzt man

$$f_3 + \lambda f_4 = \varphi_3 = A_3 x_1^4 + B_3 x_1^3 x_2 + \ldots + E_3 x_2^4,$$

so ist

23) $$w(x_1 x_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & A_3 & x_1^3 & 0 \\ b_1 & b_2 & B_3 & -3x_1^2 x_2 & x_1^3 \\ c_1 & c_2 & C_3 & 3x_1 x_2^2 & -3x_1^2 x_2 \\ d_1 & d_2 & D_3 & -x_2^3 & 3x_1 x_2^2 \\ e_1 & e_2 & E_3 & 0 & -x_2^3 \end{vmatrix} = W_1(x_1 x_2) + \lambda W_2(x_1 x_2),$$

d. h. $w(x_1 x_2) = 0$ ist eine Involution vierten Grades und erster Stufe. Der Factor U der Discriminante von $w(x_1 x_2)$ ist in diesem Falle die Resultante der aus der Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & A_3 & x_1^4 \\ b_1 & b_2 & B_3 & -4x_1^3 x_2 \\ c_1 & c_2 & C_3 & 6x_1^2 x_2^2 \\ d_1 & d_2 & D_3 & -4x_1 x_2^3 \\ e_1 & e_2 & E_3 & x_2^4 \end{vmatrix}$$

zu entnehmenden Gleichungen, und hat nach Herrn **Brill** die Form

24) $$U = \begin{vmatrix} 4\bar\alpha_0 & 6\bar\alpha_1 & 4\bar\alpha_2 & \bar\alpha_3 \\ 6\bar\alpha_1 & 4\bar\alpha_2 + 24\bar\beta_2 & \bar\alpha_3 + 16\bar\beta_3, & 4\bar\alpha_4 \\ 4\bar\alpha_2 & 16\bar\beta_1 + \bar\alpha_3, & 4\bar\alpha_4 + 24\bar\beta_4, & 6\bar\alpha_5 \\ \bar\alpha_3 & 4\bar\alpha_4 & 6\bar\alpha_5 & 4\bar\alpha_6 \end{vmatrix},$$

wo z. B. $\bar{\alpha} = \alpha + \lambda\alpha'$ ist. $U = 0$ liefert die Werthe von λ, für welche $w(x_1 x_2)$ eine Doppelwurzel besitzt. Diesen Werthen von λ entsprechen nun die Verschwindungselemente der aus der obigen Matrix entnommenen Gleichungen. Wir gehen nun nach diesen Vorbereitungen zur folgenden Frage über, Herr Brill zeigt nämlich, dass man durch Adjunction je einer Wurzel der folgenden Gleichung

$$8(3\alpha_3^2 A_2 + 6\alpha_3 A_0 A_5 - 2\alpha_3 A_1 A_4 - 4A_1^2 A_6)(3\alpha_3^2 A_4 + 6\alpha_3 A_6 A_1 - 2\alpha_3 A_5 A_2 - 4A_5 A_0) - \\ -(9\alpha_3^2 - 4A_1 A_5)^2 (A_3\alpha_3 - \alpha_3^2 + 8A_0 A_6) = 0$$

die allgemeine Form

$$F_1 = A_0 x_1^6 + A_1 x_1^5 x_2 + \dots + A_7 x_2^6$$

auf die Form

$$W_1(x_1 x_2)$$

bringen kann. Es fragt sich nun, wie müssen zwei Formen

$$F_1 \quad \text{und} \quad F_2$$

beschaffen sein, damit man sie durch Adjungirung der Wurzeln der obigen Gleichung und der entsprechenden in den α' auf die Formen

$$W_1(x_1 x_2), \quad W(x_1 x_2)$$

bringen könne. Hat man F_1 und F_2 auf diese Formen gebracht, so ist auch

$$F_1 + \lambda F_2 = W_1(x_1 x_2) + \lambda W_2(x_1 x_2) = w(x_1 x_2).$$

Bezeichnet man die Coëfficienten von $F_1\ F_2$ und $F_1 + \lambda F_2$, resp. durch

$$A_\iota, \quad B_\iota, \quad A_\iota$$

und die linken Seiten der Gleichungen, deren Wurzeln zu adjungiren sind, um die Formen F_1 und F_2 auf die Formen $W_1(x_1 x_2)$ und $W_2(x_1 x_2)$ zu bringen, mit $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und entwickelt die Gleichung

25) $$8(3\bar{\alpha}_3 A_2 + 6\bar{\alpha}_3 A_0 A_5 - 2\bar{\alpha}_3 A_1 A_4 - 4A_1^2 A_6)(3A_4\bar{\alpha}_3^2 + 6\bar{\alpha}_3 A_6 A_1 - 2\bar{\alpha}_3 A_5 A_2 - 4A_5^2 A_0) \\ -(9\bar{\alpha}_3^2 - 4A_1 A_5)^2 (A_3\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_3^2 + 8A_0 A_6) = 0,$$

deren Wurzeln adjungirt werden müssen, um $F_1 + \lambda F_2$ in die Form $w(x_1 x_2)$ überzuführen, nach λ, so erhält man, wie die Rechnung zeigt,

26) $$0 = \mathfrak{G}_1(\alpha) + \{\mathfrak{G}_1'(\alpha)\alpha' + \Delta(\mathfrak{G}_1)\}\lambda + \{\mathfrak{G}_1''(\alpha)\alpha'^2 + 2\Delta(\mathfrak{G}_1')\alpha' + \Delta^2(\mathfrak{G}_1)\}\lambda^2 + \\ + \{\mathfrak{G}_2'(\alpha')\alpha + \Delta(\mathfrak{G}_2)\}\lambda^3 + \{\mathfrak{G}_2''(\alpha')\alpha^2 + 2\Delta(\mathfrak{G}_2')\alpha + \Delta^2(\mathfrak{G}_2)\}\lambda^4 + \mathfrak{G}_2(\alpha')\lambda^5,$$

wo $\Delta(T)$ den bekannten Process bedeutet,

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial A_1} B_1 + \frac{\partial T}{\partial A_2} B_2 + \dots$$

Sollen also die Formen F_1 und F_2 in $W_1(x_1 x_2)$ und $W_2(x_1 x_2)$ überführbar sein, so müssen folgende Gleichungen stattfinden:

27) $$\begin{gathered} \mathfrak{G}_1'(\alpha)\alpha' + \Delta(\mathfrak{G}_1) = 0 \\ \mathfrak{G}_1''(\alpha)\alpha'^2 + 2\Delta(\mathfrak{G}_1')\alpha' + \Delta^2(\mathfrak{G}_1) = 0 \\ \mathfrak{G}_2'(\alpha')\alpha + \Delta(\mathfrak{G}_2) = 0 \\ \mathfrak{G}_2''(\alpha')\alpha^2 + 2\Delta(\mathfrak{G}_2')\alpha + \Delta^2(\mathfrak{G}_2) = 0 \end{gathered}$$

Es müssen aber nicht alle Gleichungen bestehen, sondern es genügen schon die ersten zwei, weil aus diesen schon die übrigen zwei folgen. Aus der ersten Gleichung folgt nämlich

$$\alpha' = -\frac{\Delta(\mathfrak{G}_1)}{\mathfrak{G}_1'(\alpha)},$$

d. h., dass die Wurzeln von $\mathfrak{G}_2 = 0$ rationale Functionen der Wurzeln von $\mathfrak{G}_1 = 0$ sind. Man kann daher $\mathfrak{G}_2$ in folgender Form schreiben:

28) $$\mathfrak{G}_2 = R\{\mathfrak{G}_1,\ \Delta(\mathfrak{G}_1) + \lambda\mathfrak{G}_1'\},$$

wo das Symbol rechts die Resultante von

$$\mathfrak{G}_1 \quad \text{und} \quad \Delta(\mathfrak{G}_1) + \lambda\mathfrak{G}_1'$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt bekanntlich die Relation

29) $$\mathfrak{G}_2\left(-\frac{\Delta(\mathfrak{G}_1)}{\mathfrak{G}_1'}\right) = \mathfrak{G}_1 \cdot \psi,$$

welche in

$$\mathfrak{G}_1\left(-\frac{\Delta(\mathfrak{G}_2)}{\mathfrak{G}_2'}\right) = \mathfrak{G}_2 \cdot \psi'$$

übergeht, wenn man die A mit den B vertauscht. Diese Gleichung sagt nichts Anderes aus, als dass auch die Wurzeln von $\mathfrak{G}_1 = 0$ rationale Functionen der Wurzeln von $\mathfrak{G}_2 = 0$ sind. Die Form der Functionen ist

$$\alpha = -\frac{\Delta(\mathfrak{G}_2)}{\mathfrak{G}_2'(\alpha')},$$

was die dritte Gleichung verlangt. Eben so leicht leitet man die vierte Gleichung aus der ersten und zweiten ab. Wir können jetzt folgenden Satz aussprechen:

Satz.

Sind zwei Formen sechsten Grades gegeben

$$F_1 = A_0 x_1^6 + A_1 x_1^5 x_2 + A_2 x_1^4 x_2^2 + \ldots + A_6 x_2^6$$
$$F_2 = B_0 x_1^6 + B_1 x_1^5 x_2 + B_2 x_1^4 x_2^2 + \ldots + B_6 x_2^6$$

und bildet man ihre Brill'schen Gleichungen

$$\mathfrak{G}_1 = 0,\ \mathfrak{G}_2 = 0,$$

so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Formen sich nach Adjungirung der Wurzeln dieser Gleichungen in die Formen

$$W_1(x_1 x_2),\quad W_2(x_1 x_2)$$

überführen lassen, das Bestehen folgender Gleichungen

30) $$\begin{gathered}\mathfrak{G}_1'(\alpha)\alpha' + \Delta(\mathfrak{G}_1) = 0 \\ \mathfrak{G}_1''(\alpha)\alpha'^2 + 2\Delta(\mathfrak{G}_1')\alpha' + \Delta^2(\mathfrak{G}_1) = 0\end{gathered}$$

Das Charakteristische der Formen

$$W_1(x_1 x_2),\quad W_2(x_1 x_2)$$

ist nach dem Obigen, dass ihre Functionaldeterminante sich in zwei Factoren von resp. vierten und sechsten Grade zerlegen lässt; wir können desshalb den Satz aussprechen:

Satz.

Sind die Formen F_1 und F_2 von der Beschaffenheit, dass zwischen den Wurzeln ihrer Brill'schen Gleichungen die Relationen 30) stattfinden, so lässt sich durch Adjungirung dieser Wurzeln die Functionaldeterminante der Formen in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine vom vierten und der andere vom sechsten Grade ist.

§. 5.

Die Haupteombinante von n binären Formen $n$ter Ordnung, wobei n ungerade ist, lässt sich, wie ich an anderer Stelle nachgewiesen habe, in der Gestalt darstellen:

I) $$M = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \dots + P_n f_n,$$

wo allgemein P_i eine Invariante der $n-1$ Formen

$$f_1 f_2 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_n$$

bedeutet. Mit Hilfe dieser Identität kann man mit Leichtigkeit eine andere Darstellung von M ableiten, welche aus je $n-1$ Formen und aus Theilen von M zusammengesetzt ist, wobei ich unter Theilen von M folgende Functionen verstehe:

$$\begin{array}{l} A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} \\ A_0 x^{n-2} + A_1 x^{n-3} + \dots + A_{n-2} \\ A_0 x^{n-3} + A_1 x^{n-4} + \dots + A_{n-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 x \quad + A_1 \\ A_0 \end{array}$$

wenn M in der Form geschrieben ist

$$M = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n.$$

Solche Darstellungen gibt es n, entsprechend den Combinationen von je $n-1$ aus den n Formen und man könnte glauben, aus diesen n Darstellungen durch Auflösung nach f_i eine neue Darstellung für diese zu bekommen, dass dies nicht der Fall ist, soll nachher bewiesen werden. Stellen wir die Formen als Summen von Potenzen linearer Functionen dar:

31) $$\begin{aligned} f_1 &= A_1 (x_1 + m_1 x_2)^n + B_1 (x_1 + m_2 x_2)^n + \dots + N_1 (x_1 + m_n x_2)^n \\ f_2 &= A_2 (x_1 + m_1 x_2)^n + B_2 (x_1 + m_2 x_2)^n + \dots + N_2 (x_1 + m_n x_2)^n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n &= A_n (x_1 + m_1 x_2)^n + B_n (x_1 + m_2 x_2)^n + \dots + N_n (x_1 + m_n x_2)^n \end{aligned}$$

und combiniren mit je $n-1$ derselben die Identität I), welche in Folge von 31) sich folgendermassen schreiben lässt

32) $$M = (\Sigma A_\iota P_\iota)(x_1 + m_1 x_2)^n + (\Sigma B_\iota P_\iota)(x_1 + m_2 x_2)^n + \dots + (\Sigma N_\iota P_\iota)(x_1 + m_n x_2)^n,$$

so ergibt sich, wenn man z. B. die $n-1$ ersten Formen nimmt und aus ihnen und 32) die $n$ten Potenzen bestimmt:

$$
D(x_1+m_1x_2)^n = \begin{vmatrix} M & \Sigma B_\iota P_\iota & \ldots & \Sigma N_\iota P_\iota \\ f_1 & B_1 & \ldots & N_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1} & B_{n-1} & \ldots & N_{n-1} \end{vmatrix}
$$

33) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
D(x_1+m_nx_2)^n = \begin{vmatrix} \Sigma A_\iota P_\iota & \Sigma B_\iota P_\iota & \ldots & M \\ A_1 & B_1 & \ldots & f_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1} & B_{n-1} & \ldots & f_{n-1} \end{vmatrix}
$$

wo

$$
D = \begin{vmatrix} \Sigma A_\iota P_\iota & \Sigma B_\iota P_\iota & \ldots \\ A_1 & B_1 & \ldots \\ A_2 & B_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1} & B_{n-1} & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n & B_n & \ldots \\ A_1 & B_1 & \ldots \\ A_2 & B_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1} & B_{n-1} & \ldots \end{vmatrix} P_n.
$$

Schreiben wir 33) in der Form

$$
\begin{aligned}
D(x_1+m_1x_2)^n &= D_{11}M+D_{21}f_1+\ldots+D_{n-1\,1}f_{n-1} \\
D(x_1+m_2x_2)^n &= D_{12}M+D_{22}f_1+\ldots+D_{n-1\,2}f_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D(x_1+m_nx_2)^n &= D_{1n}M+D_{2n}f_1+\ldots+D_{n-1\,n}f_{n-1}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

so müssen offenbar die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
D_{21}f_1+D_{31}f_2+\ldots+D_{n-1\,1}f_{n-1} &= 0 \\
D_{22}f_1+D_{32}f_2+\ldots+D_{n-1\,2}f_{n-1} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_{2n}f_1+D_{3n}f_2+\ldots+D_{n-1\,n}f_{n-1} &= 0
\end{aligned}
\tag{35}
$$

je eine Wurzel mit $M=0$ gemeinschaftlich haben. Ferner sind die linken Seiten dieser Gleichungen, da sie sich zerlegen lassen in Binome von etwa folgender Gestalt:

$$
\alpha M+\beta(x_1+m_ix_2)^n,
$$

wie leicht ersichtlich ist, symmetrisch in je $n-1$ Wurzeln. Die Gleichungen in 35) können demnach wie folgt geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
0 &= F_1(P_i\Sigma m_{21}\Sigma m_2m_3\ldots)f_1+F_2(P_\iota,\Sigma m_2\ldots)f_2+\ldots+F_{n-1}(P_i,\Sigma m_2\ldots)f_{n-1} \\
0 &= F_1(P_\iota\Sigma m_{11}\Sigma m_1m_3\ldots)f_1+F_2(P_\iota,\Sigma m_1\ldots)f_2+\ldots+F_{n-1}(P_\iota,\Sigma m_1\ldots)f_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= F_1(P_\iota\Sigma m_n\ \ldots\ldots)f_1+F_2(P_\iota.\Sigma m_n\ldots)f_2+\ldots+F_{n-1}(P_\iota,\Sigma m_n\ldots)f^{n-1}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Berücksichtigt man die Identitäten:

$$\Sigma m_2 = -m_1 + \frac{A_1}{A_0} = \varphi_{1\,m_1}$$

$$\Sigma m_2 m_3 = m_1^2 - \frac{A_1}{A_0} m_1 + \frac{A_2}{A_0} = \varphi_{2\,m_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma m_2 m_3 \ldots m_{n-1} = m_1^{n-2} + \frac{A_1}{A_0} m_1^{n-3} - \frac{A_2}{A_0} m_1^{n-4} + \ldots + \frac{A_{n-2}}{A_0} = \varphi_{n-2\,m_1}$$

$$m_2 \ldots\ldots m_n = m_1^{n-1} - \frac{A_1}{A_0} m_1^{n-2} + \frac{A_2}{A_0} m_1^{n-3} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{A_0} = \varphi_{n-1\,m_1},$$

so schreiben sich die Gleichungen 36) in folgender Form:

$$37)\quad \begin{cases} F_1(P_\iota, \varphi_{1\,m_1}\,\varphi_{2\,m_1}, \ldots)f_1 + F_2(P_\iota, \varphi_{1\,m_1}, \varphi_{2\,m_1} \ldots)f_2 + \ldots + F_{n-1}(P_\iota, \varphi_{1\,m_1}\,\varphi_{2\,m_1} \ldots)f_{n-1} = 0 \\ F_1(P_\iota, \varphi_{1\,m_2}\,\varphi_{2\,m_2}, \ldots)f_1 + F_2(P_\iota, \varphi_{1\,m_2}, \varphi_{2\,m_2} \ldots)f_2 + \ldots + F_{n-1}(P_\iota, \varphi_{1\,m_2}\,\varphi_{2\,m_2} \ldots)f_{n-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_1(P_\iota, \varphi_{1\,m_n}\,\varphi_{2\,m_n}, \ldots)f_1 + F_2(P_\iota, \varphi_{1\,m_n}, \varphi_{1\,m_n} \ldots)f_2 + \ldots + F_{n-1}(P_\iota, \varphi_{1\,m_n}\,\varphi_{2\,m_n} \ldots)f_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Bedenkt man, dass die Gleichungen auseinander hervorgehen, indem man irgend zwei der Wurzeln m_ι mit einander vertauscht, so folgt leicht, dass folgende Gleichung alle Wurzeln mit $M = 0$ gemein hat:

$$0 = F_1(P_\iota, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_1 + F_2(P_\iota, \psi_0 \ldots)f_2 + \ldots + F_{n-1}(P_\iota, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_{n-1},$$

wenn man unter ψ_ι folgende Function versteht:

$$\psi_1 = x + \frac{A_1}{A_0}$$

$$\psi_2 = x^2 + \frac{A_1}{A_0} x + \frac{A_2}{A_0}$$

$$\psi_3 = x^3 + \frac{A_1}{A_0} x^2 + \frac{A_2}{A_0} x + \frac{A_3}{A_0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_{n+1} = x^{n-1} + \frac{A_1}{A_0} x^{n-2} + \frac{A_2}{A_0} x^{n-3} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{A_0}.$$

Es folgt daher die Identität

$$38)\quad F_1(P_\iota, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_1 + F_2(P_\iota\, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_2 + \ldots + F_{n-1}(P_\iota, \psi_0 \ldots)f_{n-1} = M.N_1.$$

Ähnliche Identitäten folgen selbstverständlich, wenn man andere $n-1$ der Gleichungen 31) mit 32) combinirt. Fassen wir alle zusammen, indem wir die F_ι wenn nöthig, mit Strichen versehen, so erhalten wir

$$39)\quad \begin{cases} F_1\ (P_\iota, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_1 + F_2\ (P_\iota \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_2 + \ldots + F_{n-1}\ (P_\iota, \psi_0 \ldots)f_{n-1} = M.N_1 \\ F_1'\ (P_\iota, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_1 + F_3'\ (P_\iota \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_3 + \ldots + F_n'\ (P_\iota, \psi_0 \ldots)f_{n-1} = M.N_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_2^{(n-1)}(P_\iota, \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_2 + F_3^{(n-1)}(P_\iota \psi_0 \ldots \psi_{n-1})f_3 + \ldots + F_n^{(n-1)}(P_\iota, \psi_0 \ldots)f_{n-1} = M.N_n \end{cases}$$

Dies sind die zu 31) analogen und aus derselben folgenden Formeln, von denen oben die Sprache war. Es kommt nun darauf an, zu zeigen, dass sie sich nicht auflösen lassen, d. h. dass ihre Determinante identisch verschwindet. Zu diesem Behufe greifen wir zum Principe der Apolarität zurück. Nach demselben folgt die Darstellbarkeit der n Formen und ihrer Combinante durch die $n$ten Potenzen derselben linearen Formen aus

derselben Quelle und die Identität 32) ist nur eine Consequenz von 31). Die Systeme von Gleichungen, die wir erhalten, wenn wir je $n-1$ der Gleichungen 31) mit 32) combiniren, sind nicht von einander unabhängig und in Folge dessen muss die Determinante

40) $$\begin{vmatrix} F_1, & F_2 & \dots & & F_{n-1} \\ F_1' & 0\,F_3' & \dots & F_{n-2}' & F_{n-1}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & F_2^{(n-1)} & \dots & F_{n-2}^{(n-1)} & F_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

§. 6.

Als Beispiel behandle ich drei Formen 3. Ordnung, welche die Ableitungen einer Form 5. Ordnung sind. Bekanntlich lässt sich diese als Summe von drei Potenzen der drei linearen Factoren der Combinante der drei zweiten Ableitungen darstellen. Ist also

$$f = A_1(x_1+m_1x_2)^5 + A_2(x_1+m_2x_2)^5 + A_3(x_1+m_3x_2)^5$$

so ist

41) $$\begin{aligned} \frac{1}{4.5}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= A_1\,.\,(x_1+m_1x_2)^3 + A_2(x_1+m_2x_2)^3 + A_3\,(x_1+m_3x_2)^3 \\ \frac{1}{4.5}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} &= A_1m_1(x_1+m_1x_2)^3 + A_2(x_1+m_2x_2)^3 m_2 + A_3m_3(x_1+m_3x_2)^3 \\ \frac{1}{4.5}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= A_1m_1^2(x_1+m_1x_2)^3 + A_2(x_1+m_2x_2)^3 m_2^2 + A_3m_3^2(x_1+m_3x_2)^3. \end{aligned}$$

Die Combinante M dieser Formen stellt sich also folgendermassen dar:

42) $$\begin{aligned} M &= P_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + P_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} + P_3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ &= A_1(\Sigma P_\iota m_1^{\iota-1})(x_1+m_1x^2)^3 + A_2(\Sigma P_\iota m_2^{\iota-1})(x_1+m_2x_2)^3 + A_3(\Sigma P_\iota m_3^{\iota-1})(x_1+m_3x_2)^3 \end{aligned}$$

Combinirt man diese Gleichung mit den ersten zwei Gleichungen in 41), so erhält man:

43) $$D(x_1+m_1x_2)^3 = \begin{vmatrix} M & A_2\Sigma P_\iota m_2^{\iota-1} & A_3\Sigma P_\iota m_3^{\iota-1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & A_2 & A_3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & A_2m_2 & A_3m_3 \end{vmatrix}$$

$$D(x_1+m_2x_2)^3 = \begin{vmatrix} A_1\Sigma P_\iota m_1^{\iota-1} & M & A_3\Sigma P_\iota m_3^{\iota-1} \\ A_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & A_3 \\ A_1m_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & A_3m_3 \end{vmatrix}$$

$$D(x_1+m_3x_2)^3 = \begin{vmatrix} A_1\Sigma P_\iota m_1^{\iota-1} & A_2\Sigma P_\iota m_2^{\iota-1} & M \\ A_1 & A_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \\ A_1m_1 & A_2m_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} \end{vmatrix}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 \end{vmatrix} . P_3 A_1 . A_2 . A_3 \text{ ist.}$$

Aus diesen Gleichungen folgen nun die folgenden:

$$44)\quad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_1} . \{P_1 - P_3 m_2 m_3\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_1} . \{P_2 + P_3(m_2+m_3)\} = 0 \\ &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_2} . \{P_1 - P_3 m_1 m_3\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_2} . \{P_2 + P_3(m_1+m_3)\} = 0 \\ &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_3} . \{P_1 - P_3 m_1 m_2\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_3} . \{P_2 + P_3(m_1+m_2)\} = 0. \end{aligned}$$

Dass diese Gleichungen bestehen, überzeugt man sich hier leicht auf folgende Weise. Schreibt man z. B. die linke Seite der ersten in folgender Form:

$$45)\quad P_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + P_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + P_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + P_3 \left\{- \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} m_2 m_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(m_1 + m_3) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\}$$

und berücksichtigt, dass der Ausdruck in der Klammer die dritte Potenz von $(x_1 + m_1 x_2)$ ist, wie durch die Auflösung der Gleichungen 41) folgt, so sieht man leicht, dass sie die Form

$$\alpha M + \beta (x_1 + m_1 x_2)^3$$

annimmt. Drückt man die symmetrischen Functionen zweier Elemente durch das dritte aus, schreibt also die Gleichungen 44) in folgender Art:

$$46)\quad \begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_1} . \{P_1 - P_3(m_1^2 - A_1 m_1 + A_2)\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_1} . \{P_2 + P_3(-m_1 + A_1)\} \\ 0 &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_2} . \{P_1 - P_3(m_2^2 - A_1 m_2 + A_2)\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_2} . \{P_2 + P_3(-m_2 + A_1)\} \\ 0 &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_3} . \{P_1 - P_3(m_3^2 - A_1 m_3 + A_2)\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_3} . \{P_2 + P_3(-m_3 + A_1)\} \end{aligned}$$

so folgt sofort, dass folgende Relation besteht:

$$47)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\{P_1 - P_3(x^2 + A_1 x + A_2)\} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\{P_2 + P_3(x + A_1)\} = M . N_1.$$

Durch Combination von 42) mit der ersten und dritten in 41) erhält man

$$48)\quad \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_1} . \{P_1(m_2+m_3) + P_2 m_2 m_3\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_1} . \{P_2 + P_3(m_2+m_3)\} = 0 \\ &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_2} . \{P_1(m_1+m_3) + P_2 m_1 m_3\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_2} . \{P_2 + P_3(m_1+m_3)\} = 0 \\ &\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_3} . \{P_1(m_1+m_2) + P_2 m_1 m_2\} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{x_1 : x_2 = -m_3} . \{P_2 + P_3(m_1+m_2)\} = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Gleichung:

49) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\{P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2)\}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\{P_2+P_3(x+A_1)\}=M.N_2.$$

Eine Combination endlich der zweiten und dritten Gleichung in 41) mit 42) ergibt die Gleichungen:

50) $$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]_{x_1:\,x_2=-m_1}.\{P_1(m_2+m_3)+P_2m_2m_3\}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{x_1:\,x_2=-m_1}.\{-P_1+P_3m_2m_3\}=0\\
&\left[\frac{\partial_2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]_{x_1:\,x_2=-m_2}.\{P_1(m_1+m_3)+P_2m_1m_3\}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{x_1:\,x_2=-m_2}.\{-P_1+P_3m_1m_3\}=0\\
&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right]_{x_1:\,x_2=-m_3}.\{P_1(m_1+m_2)+P_2m_1m_2\}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]_{x_1:\,x_2=-m_3}.\{-P_1+P_3m_1m_2\}=0
\end{aligned}$$

und in Folge dessen die Gleichung

51) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\{P_1(x_1+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2)\}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\{-P_1+P_3(x^2+A_1x+A_2)\}=M.N_3.$$

Aus 47) 49) 51) ergibt sich leicht, dass die Functionen

$$N_1,\quad N_2,\quad N_3$$

die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
N_1&=1\\
N_2&=x+A_1\\
N_3&=x^2+A_1x+A_2.
\end{aligned}$$

Was die Determinante

52) $$D=\begin{vmatrix} 0, & P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2), & -P_1+P_3(x^2+A_1x+A_2)\\ P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2), & 0 & P_2+P_3(x+A_1)\\ P_1-P_3(x^2+A_1x+A_2), & P_2+P_3(x+A_1) & 0\end{vmatrix}$$

betrifft, so lässt sie sich folgendermassen schreiben:

53) $$\begin{aligned}
D&=\begin{vmatrix} 0 & P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2), & M.N_3\\ P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2) & 0 & M.N_2\\ P_1-P_3(x^2+A_1x+A_2) & P_2+P_3(x+A_1) & M.N_1\end{vmatrix}\\
&=M.\begin{vmatrix} 0 & P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2) & x^2+A_1x+A_2\\ P_1(x+A_1)+P_2(x^2+A_1x+A_2) & 0 & x+A_1\\ P_1-P_3(x^2+A_1x+A_2) & P_2+P_3(x+A_1) & 1\end{vmatrix}\\
&=M.\begin{vmatrix} -P_1(x^2+A_1x+A_2) & P_1\ (x+A_1) & x^2+A_1x+A_2\\ P_2\ (x^2+A_1x+A_2) & -P_2(x+A_1) & x+A_1\\ -P_3(x^2+A_1x+A_2) & P_3\ (x+A_1) & 1\end{vmatrix}\\
&=M(x^2+A_1x+A_2)(x+A_1)\begin{vmatrix} -P_1 & P_1 & x^2+A_1x+A_2\\ P_2 & -P_2 & x+A_1\\ -P_3 & P_3 & 1\end{vmatrix}=0.
\end{aligned}$$

§. 7.

Es ist bekannt, dass man eine Gleichung fünften Grades nur durch eine nicht lineare Substitution auf die Form

54) $$x^5+ax+b=0$$

bringen kann. Eine solche Überführung der Form nennt man gewöhnlich die Jerrard'sche Transformation. Nur wenn die Invariante zwölften Grades C verschwindet, lässt sich die Form durch eine lineare Substitution in die Form 54) transformiren, wo sie dann die Gestalt annimmt

55) $$x^5-x-\frac{1}{5}\sqrt[4]{\frac{4A^2}{5B}}=0,$$

wenn unter A und B die Invarianten vierten, resp. achten Grades verstanden werden. Es fragt sich nun, ob im Falle $C=0$ die Jerard'sche Transformation möglich ist. Diese Frage scheint mir um so mehr berechtigt, als aus der Hermite'schen Theorie der Jerrard'schen Form hervorzugehen scheint, dass im Falle $C=0$ nur eine lineare Substitution die Form in die canonische überführen kann, denn die Überführung der allgemeinen Form fünften Grades auf die Hermite'sche ist nur dann möglich, wenn C nicht verschwindet. Dass die Jerrard'sche Transformation selbst im Falle $C=0$ möglich ist, und dass demnach die Theorie von Hermite nicht allgemein genug ist, zeigt man folgendermassen. Es sei

56) $$f_1+\lambda f_2=0$$

eine Involution fünfter Ordnung und erster Stufe, so lässt sich dieselbe durch die Jerrard'sche Transformation auf die Form

57) $$z^5+Az+B=0$$

bringen. Jeder Form in 56) entspricht eine Form in 57) d. h. 57) stellt die transformirte Involution dar. Nun liefert die Invariante $C_{f_1+\lambda f_2}=0$ zwölf Werthe von λ, d. h. es gibt zwölf Gruppen in 56), die sich in der Form

58) $$z^5-z-\frac{1}{5}\sqrt[4]{\frac{4A^2_{f_1+\lambda f_2}}{5B_{f_1+\lambda f_2}}}=0$$

darstellen lassen. Diese zwölf Gruppen finden sich aber auch in 57, daraus folgt, dass auch solche Formen, deren Invariate C gleich Null ist, durch eine Jerrard'sche Transformation auf die canonische Form überführbar sind. Auf dieselbe Weise erledigt sich auch die Frage, ob eine Form, die schon die Gestalt

59) $$\alpha x^5+\beta x+\gamma$$

und also die Eigenschaft der canonischen Form besitzt, durch eine Jerrard'sche Transformation, resp. eine lineare Substitution auf die Form 54), resp. 55) sich bringen lässt. Nehmen wir nämlich f_1 und f_2 in folgender Gestalt an:

60) $$\begin{aligned} f_1 &= a_0x^5+5a_1x^4+10\rho a_1x^3+10\rho_1a_1x^2+a_4x+a_5 \\ f_2 &= b_0x^5+5b_1x^4+10\rho b_1x^3+10\rho_1b_1x^2+b_4x+b_5, \end{aligned}$$

so verschwindet in der Involution 56) das zweite, dritte und vierte Glied für $\lambda=-a_1:b_1$, d. h. $C_{f_1+\lambda f_2}=0$ hat die Wurzel $-a_1:b_1$. Für dieses λ finden sich transformirte Formen in 57) und 58), daraus folgt, dass auch die Form 59) sich in 54) und 55) transformiren lässt.

Eine allgemeine Form fünften Grades lässt sich offenbar durch eine lineare Substitution so transformiren, dass zwischen den zweiten, dritten und vierten Coëfficienten, welche mit A_1, A_2, A bezeichnet werden mögen die Beziehung

61)
$$A_2 = \rho A_1$$
$$A_3 = \rho_1 A_1$$

stattfindet, wenn ρ, ρ_1 beliebig gegebene Grössen bedeuten. Nach dem bekannten Principe, nach welchem man die Substitutionsgrössen so bestimmen kann, dass vier Coëfficienten der transformirten Form beliebige Werthe annehmen können, wofern keine specielle Eigenschaft der Invarianten dadurch herbeigeführt wird, müsste es möglich scheinen, zwei Formen

$$f_1 = a_x^5 \quad f_2 = b_x^5$$

gleichzeitig so transformiren zu können, dass die Beziehungen

62)
$$A_2 = \rho A_1\,, \quad A_3 = \rho_1 A_1$$
$$B_2 = \rho B_1\,, \quad B_3 = \rho_1 B_1$$

bestehen. Denn diese Beziehungen liefern vier Gleichungen zwischen den vier Substitutionscoëfficienten, aus denen diese wie folgt bestimmt werden. Man eliminirt drei derselben, so dass für die vierte eine Gleichung höheren Grades entsteht, durch deren Lösungen sich bekanntlich die übrigen drei rational ausdrücken. Dass dies nicht der Fall ist, dass also zwei allgemeine Formen 5. Ordnung nicht gleichzeitig derartig transformirt werden können, beweist man folgendermassen. Bildet man die Involution

$$F = f_1 + \lambda f_2$$

so wird die transformirte derselben die Form haben:

63)
$$F' = A_0' x_1^5 + 5 A_1' x_1^4 x_2 + 10 A_2' x_1^3 x_2^2 + 10 A_3' x_1^2 x_2^3 + 5 A_4' x_1 x_2^4 + A_5' x_2^5$$

wo $A_\iota' = A_\iota + \lambda B_\iota$ ist. Indem man λ aus $A_1' = 0$ bestimmt, d. h. $\lambda = -A_1 : B_1$ setzt, geht F' in die Form über:

64)
$$F'' = A_0' x_1^5 + 5 A_4' x_1 x_2^4 + A_5' x_2^5.$$

Bezeichnet man die Invariante zwölften Grades von $f_1 + \lambda f_2$ mit $C_{f_1+\lambda f_2}$ und dem entsprechend diejenige von 63) mit $C'_{F_1+\lambda F_2}$, so muss diese für diesen Werth von λ verschwinden.

Aus der Relation

$$C_{F_1+\lambda F_2} = \Delta^\nu C_{f_1+\lambda}$$

würde nun folgen, dass auch $C_{f_1+\lambda f_2} = 0$ eine Wurzel

$$\lambda = -A_1 : B_1$$

hat. Nun hängen die Substitutionscoëfficienten, die man aus den Gleichungen 62) bestimmt, von den Grössen ρ, ρ_1 ab, während die linearen Factoren, in die sich $C_{f_1+\lambda f_2}$ zerlegt, von ihnen unabhängig sind, daraus folgt die Unmöglichkeit der gleichzeitigen Transformation beider Formen von der Art, dass die Beziehungen 62) stattfinden.

§. 8.

Verfolgen wir weiter die in 60) erwähnten speciellen Formen, deren Involution

$$F = (a_0 + \lambda b_0) x^5 + 5(a_1 + \lambda b_1) x^4 y + 10\rho (a_1 + \lambda b_1) x^3 y^2 + 10 \rho_1 (a_1 + \lambda b_1) x^2 y^3 + 5(a_4 + \lambda b_4) x y^4 + (a_5 + \lambda b_5) y^5$$

für $\lambda = -\frac{a_1}{b_1}$ in

65)
$$F_1' = (a_0 b_1 - a_1 b_0) x^5 + 5(a_4 b_1 - a_1 b_4) x y^4 + (a_5 b_1 - a_1 b_5) y^5$$

übergeht, d. h. in die canonische Form. Die Discriminante von F' ist wie man leicht sieht,

$$D = (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_5 b_1 - a_1 b_5)^4 + 4^4 (a_4 b_1 - a_1 b_4)^5, \tag{66}$$

deren Verschwinden aussagt, dass die Involution $F=0$ für $\lambda = -a_1 : b_1$ eine Doppelwurzel hat. Denken wir jetzt die allgemeine Gleichung

$$(a_0 \lambda_2 - b_0 \lambda_1)(a_5 \lambda_2 - b_5 \lambda_1)^4 + 4^4 (a_4 \lambda_2 - b_4 \lambda_1)^5 = 0 \tag{67}$$

aufgelöst und seien die fünf Wurzeln derselben

$$+\alpha_2^i : \alpha_1^i \qquad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

und bilden wir die fünf Involutionen:

$$F_i = (a_0 - \lambda b_0) x^5 + 5(\alpha_2^i - \lambda \alpha_1^i) x^4 y + 10 \rho (\alpha_2^i - \lambda \alpha_1^i) x^3 y^2 + 10 \rho_1 (\alpha_2^i - \lambda \alpha_1^i) x^2 y^3 + 5 (a_4 - \lambda b_4) x y^4 + (a_5 - \lambda b_5) y^5,$$

so hat jede derselben ein Doppelelement für

$$\lambda = \alpha_2^i : \alpha_1^i.$$

Diese Doppelelemente sind die Wurzeln der Jacobi'schen Determinanten und entsprechen sich diese und die Werthe von λ für die die Involution ein Doppelelement hat eindeutig, daraus folgt, dass die Jacobi'schen Determinanten vom Typus:

$$J = \begin{vmatrix} a_0 x^4 + 4\alpha_1^i x^3 y + 6\rho \alpha_1^i x^2 y^2 + 4\rho_1 \alpha_1^i x y^3 + a_4 y^4, & a_1 x^4 + 4\rho \alpha_1^i x^3 y + 6 \rho_1 \alpha_1^i x^2 y^2 + 4 a_4 x y^3 + a_5 y^5 \\ b_0 x^4 + 4\alpha_2^i x^3 y + 6\rho \alpha_2^i x^2 y^2 + 4\rho_1 \alpha_2^i x y^3 + b_4 y^4, & b_1 x^4 + 4\rho \alpha_2^i x^3 y + 6 \rho_1 \alpha_2^i x^2 y^2 + 4 b_4 x y^3 + b_5 y^5 \end{vmatrix} \tag{68}$$

$$= (01) x^8 + 4\rho (01) x^7 y + 6\rho_1 (01) x^6 y^2 + 4 (04) x^5 y^3 + (05) x^4 y^4 + 4^2 (14) x^4 y^4$$
$$+ 4 (15) x^3 y^5 + 4.6\rho (14) x^3 y^5 + 6\rho (15) x^2 y^6 + 4^2 \rho_1 (14) x^2 y^6 + 4\rho_1 (15) x y^7$$
$$+ (41) x^4 y^4 + 4\rho (41) x^3 y^5 + 6\rho_1 (41) x^2 y^6 + (45) y^8$$

mit Hilfe einer Gleichung fünften Grades auflösbar sind. Indem man nämlich die Gleichung 67) auflöst, ergibt sich $x : y$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4 (a_4 \lambda_2 - b_4 \lambda_1) x + (a_5 \lambda_2 - b_5 \lambda_1) y = 0.$$

Um aber die Gleichung fünften Grades, mit der jede der Jacobi'schen Determinanten in 68) eine Wurzel gemein hat, direct zu ermitteln, bemerke man Folgendes. Wenn man zwei Formen in der canonischen Form hat

$$f_1 = a_0 x^5 + 5 a_4 x y^4 + a_5 y^5$$
$$f_2 = b_0 x^5 + 5 b_4 x y^4 + b_5 y^5$$

und die Involution

$$F = (a_0 \lambda_2 - b_0 \lambda_1) x^5 + 5 (a_4 \lambda_2 - b_4 \lambda_1) x y^4 + (a_5 \lambda_2 - b_5 \lambda_1) y^5$$

bildet, so ist die Discriminante derselben

$$D = (a_0 \lambda_2 - b_0 \lambda_1)(a_5 \lambda_2 - b_5 \lambda_1)^4 + 4^4 (a_4 \lambda_2 - b_4 \lambda_1)^5,$$

es entsprechen also den Werthen dieser Gleichung die fünf Werthe der Jacobi'schen Determinante

$$J = \begin{vmatrix} a_0 x^4 + a_4 y^4 & 4 a_4 x y^3 + a_5 y^4 \\ b_0 x^4 + b_4 y^4 & 4 b_4 x y^3 + b_5 y^4 \end{vmatrix} \tag{69}$$

$$= \{4 (04) x^5 + (05) x^4 y + (45) y^5\} y^3 = 0.$$

Von den obigen fünf Gleichungen in 68) hat je eine eine Wurzel dieser Gleichung. Dies lässt sich leicht verificiren. Fasst man nämlich die Determinante in 68) wie folgt zusammen:

70)
$$\begin{aligned} &\{4(04)x^5+(05)x^4y+(45)y^5\}y^3 \\ &+\{\ (01)x^5+4^2(14)xy^4+(41)xy^4+4(15)y^5\}x^3 \\ &+\{4(01)x^5+4.6(14)xy^4+4(41)xy^4+6(15)y^5\}\rho x^2y \\ &+\{6(01)x^5+4^2\ \ (14)xy^4+6(41)xy^4+4(15)y^5\}\rho_1 xy^2, \end{aligned}$$

so sieht man leicht, dass, wenn die erste Zeile dieses Ausdruckes, nämlich die Covariante 69), verschwindet, die übrigen Zeilen, jede für sich, vermöge der Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ (01)x^4+(41)y^4 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4(41)x\ +(51)y\ = 0$$

verschwinden.

§. 9.

Eine Gleichung von der Form

71)
$$(a_0\lambda_2-b_0\lambda_1)(a_5\lambda_2-b_5\lambda_1)^4+\nu(a_4\lambda_2-b_4\lambda_1)^5 = 0$$

lässt sich leicht auf die canonische Form bringen. Setzt man nämlich

$$a_0\lambda_2-b_0\lambda_1 = \zeta_1$$
$$a_5\lambda_2-b_5\lambda_1 = \zeta_2,$$

so folgt

$$\lambda_2 = \frac{b_5\zeta_1-b_0\zeta_2}{a_0b_5-a_5b_0}\quad,\quad \lambda_1 = \frac{a_5\zeta_1-a_0\zeta_2}{a_0b_5-a_5b_0}.$$

Diese Ausdrücke in 71) eingesetzt, gibt

72)
$$\begin{aligned} \zeta_1\zeta_2^4+\frac{\nu}{(05)}\{a_4(b_5\zeta_1-b_0\zeta_2)-b_4(a_5\zeta_1-a_0\zeta_2)\}^5 &= \zeta_1\zeta_2^4+\frac{\nu}{(05)}\{a_4(b_5\zeta_1-b_0\zeta_2)-b_4(a_5\zeta_1-a_0\zeta_2)\}^5 \\ &= \zeta_1\zeta_2^4+\frac{\nu}{(05)}\{(45)\zeta_1-(40)\zeta_2\}^5. \end{aligned}$$

Führt man zur Abkürzung für $\zeta_1:\zeta_2$ die Grösse z ein und setzt

$$z = \frac{\eta}{(45)}+\frac{(40)}{(45)},$$

so geht der letzte Ausdruck in 72) in folgenden über:

73)
$$\begin{aligned} &\frac{\nu}{(05)^5}\eta^5+\frac{\eta}{(45)}+\frac{(40)}{45} \\ &= \eta^5+\frac{(05)^5}{\nu(45)}\eta+\frac{(40)(05)^5}{(45)} = 0, \end{aligned}$$

welcher die canonische Form ist. Daraus folgt, dass die Invariante C der linken Seite in 71) verschwindet.

§. 10.

Bildet man aus zwei Formen fünften Grades in der canonischen Form und ihrer Jacobi'schen Covariante die Resultante

$$R\{J, f_1+\lambda f_2\},$$

so geht dieselbe offenbar über in

74) $$R\{J, f_1+\lambda f_2\} = M.\{(01)(51)^4+4^4(41)^5\}.$$

Es könnte nun scheinen, dass, wenn man für $\lambda_1 : \lambda_2 \; -f_1 : f_2$ setzt, die Resultante in eine Form von $x : y$ übergeht, welche das Quadrat der Jacobi'schen Determinante enthält, da

$$R\{J,\; f_1+\lambda f_2\}_{\lambda = -f_1 : f_2}$$

das Product folgender Gruppen ist

$$f_1+\lambda_i f_2 \qquad (i_1 = 1, 2, \ldots 5),$$

wo λ_i die Wurzeln der Discriminante der Involution sind. Dass dies nicht der Fall ist, soll jetzt gezeigt werden. Setzt man zunächst in die Discriminante

$$D = (01)(51)^4+4^4(41)^5$$

für $\lambda_1 : \lambda_2$ den Werth der aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial (f_1-\lambda f_2)}{\partial y} = 0$$

folgt nämlich

$$\lambda_1 : \lambda_2 = +\frac{4a_4x+a_5y}{4b_4x+b_5y},$$

so folgt da

$$a_0\{4b_4x+b_5y\}-b_0\{4a_4x+a_5y\} = 4(0,4)x+(05)y$$
$$a_5\{4b_4x+b_5y\}-b_5\{4a_4x+a_5y\} = 4(5,4)x$$
$$a_4\{4b_4x+b_5y\}-b_4\{4a_4x+a_5y\} = \quad (4,5)y$$

75) $$D = \{4(04)x+(05)y\}4^4(54)^4x^4+4^4(45)^5y^5$$
$$= 4^4(45)^4\{4(04)x^5+(05)x^4y+(45)y^5\} = 4^4(45)^4.J.$$

Setzt man für $\lambda_1 : \lambda_2$ den Werth, der aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial (f_1-\lambda f_2)}{\partial x} = 0$$

folgt, nämlich

$$\lambda_1 : \lambda_2 = +\frac{a_0x^4+a_4y^4}{b_0x^4+b_4y^4},$$

so geht die Discriminante, weil

$$a_0\{b_0x^4+b_4y^4\}-b_0\{a_0x^4+a_4y^4\} = (04)y^4$$
$$a_5\{b_0x^4+b_4y^4\}-b_5\{a_0x^4+a_4y^4\} = (50)x^4+(54)y^4$$
$$a_4\{b_0x^4+b_4y^4\}-b_4\{a_0x^4+a_4y^4\} = (40)x^4$$

ist, über in

$$D = (04)\,[\{(50)\,x^4y+(54)\,y^5\}^4-4^4(04)^4(x^5)^4]$$

76) $$= (04)\,\{(50)\,x^4y+(54)\,y^5-4\,(04)\,x^5\}\,\{(50)\,x^4y+(54)\,y^5+4\,(04)\,x^5\}$$

$$\times\{(50)\,x^4y+(54)\,y^5-4i(04)\,x^5\}\,\{(50)\,x^4y+(54)\,y^5+4i(04)\,x^5\}.$$

Der erste Factor ist $-J$, der zweite entsteht aus J, wenn $x=x$, $y=-y$ gesetzt wird, d. h. er hat die gleichen und entgegengesetzten Wurzeln von J, der dritte Factor geht aus J hervor, wenn man

$$x = ix \quad, y = -y$$

setzt, d. h. er hat die mit i multiplicirten entgegengesetzten Wurzeln von J und endlich hat der vierte Factor die mit i multiplicirten Wurzeln von J. Dass die vier Factoren so beschaffen sein müssen, sieht man a priori ein, denn es ist

$$\frac{1}{5}\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_2(a_0x^4+a_4y^4)-\lambda_1(b_0x^4+b_4y^4) =$$

$$\{\sqrt[4]{(a_0\lambda_2-b_0\lambda_1)}\cdot x+\sqrt[4]{(b_4\lambda_1-a_4\lambda_2)}\cdot y\}\,\{\sqrt[4]{(a_0\lambda_2-b_0\lambda_1)}\cdot x-\sqrt[4]{(b_4\lambda_1-a_4\lambda_2)}\cdot y\}\times$$

$$\{\sqrt[4]{(a_0\lambda_2-b_0\lambda_1)}\cdot x+i\sqrt[4]{(b_4\lambda_1-a_4\lambda_2)}\cdot y\}\,\{\sqrt[4]{(a_0\lambda_2-b_0\lambda_1)}\cdot x-i\sqrt[4]{(b_4\lambda_1-a_4\lambda_2)}\cdot y\}$$

und da diese Involution, wenn $\lambda_1:\lambda_2$ eine Wurzel der Discriminante ist, eine Wurzel einer dieser Factoren hat, so ist das Verhältniss derselben von vornherein einzusehen. Anders verhält es sich, wenn man für $\lambda_1:\lambda_2$ den Werth, welcher aus der ursprünglichen Involution folgt, in die Discriminante einsetzt. Denn hier kommt nicht nur die Jacobi'sche Covariante als einfacher Factor vor, was man, wie schon oben erwähnt, nicht erwarten würde, sondern es erscheinen auch die anderen Factoren in einer Form, die man a priori nicht erwartet. Die Discriminante geht nämlich für

$$\lambda_1:\lambda_2 = \frac{a_0x^5+5a_4xy^4+a_5y^5}{b_0x^5+5b_4xy^4+b_5y^5},$$

da

$$a_0\{b_0x^5+5b_4xy^4+b_5y^5\}-b_0\{a_0x^5+5a_4xy^4+a_5y^5\} = 5(04)\,xy^4+(05)\,y^5$$

$$a_5\{b_0x^5+5b_4xy^4+b_5y^5\}-b_5\{a_0x^5+5a_4xy^4+a_5y^5\} = (50)\,x^5+5(54)\,xy^4$$

$$a_4\{b_0x^5+5b_4xy^4+b_5y^5\}-b_4\{a_0x^5+5a_4xy^4+a_5y^5\} = (40)\,x^5+(45)\,y^5$$

über in folgende

$$D = \{5(04)\,xy^4+(05)\,y^5\}\,\{(50)\,x^5+5(54)\,xy^4\}^4+4^4\{(40)\,x^5+(45)\,y^5\}^5$$

$$= \{5(04)\,xy^4+(05)\,y^5\}\,\{(50)\,x^5+5(54)\,xy^4\}^4-4^4\{5(04)\,x^5+(05)\,x^4y\}^5$$

$$= x^4\{5(04)\,x+(05)\,y\}\,[\{(50)\,x^4y+5(54)\,y^5\}^4-\{4.5(04)\,x^5+4(05)\,x^4y\}^4]$$

77) $$= x^4\{5(04)\,x+(05)\,y\}\,[\{(50)\,x^4y+5(54)\,y^5\}+\{4.5(04)\,x^5+4(05)\,x^4y\}]\times$$

$$\times[\{(50)\,x^4y+5(54)\,y^5\}-\{4.5(04)\,x^5+4(05)\,x^4y\}]\times$$

$$\times[\{(50)\,x^4y+5(54)\,y^5\}+i\{4.5(04)\,x^5+4(05)\,x^4y\}]\times$$

$$\times[\{(50)\,x^4y+5(54)\,y^5\}-i\{4.5(04)\,x^5+4(05)\,x^4y\}].$$

Nun ist

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 5.4(04)\,x^4+4(05)\,x^3y$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = (05)\,x^4+5(45)\,y^4,$$

es zerfällt also die Discriminante D in folgende Factoren:

78) $$D = x^4\{5(04)x+(05)y\}\left[\frac{\partial J}{\partial x}x-\frac{\partial J}{\partial y}y\right]\cdot\left[\frac{\partial J}{\partial x}x+\frac{\partial J}{\partial y}y\right]\cdot\left[i\frac{\partial J}{\partial x}x-\frac{\partial J}{\partial y}y\right]\cdot\left[i\frac{\partial J}{\partial x}x+\frac{\partial J}{\partial y}y\right]\cdot$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial J}{\partial x}x-\frac{\partial J}{\partial y}y\right]^2\left[\frac{\partial J}{\partial x}x+\frac{\partial J}{\partial y}y\right]\left[i\frac{\partial J}{\partial x}x-\frac{\partial J}{\partial y}y\right]\left[i\frac{\partial J}{\partial x}x+\frac{\partial J}{\partial y}y\right]$$

Es erscheint also der Factor J nur linear und setzen sich die übrigen Factoren aus den Differentialquotienten von J zusammen. Auf die Frage, wie sich die einschlägigen Verhältnisse bei allgemeinen Formen gestalten, werde ich in einer anderen Arbeit zurückkommen.

§. 11.

Wir betrachten jetzt die einfache Involution vierten Grades und zweiter Stufe:

79) $$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 \\ \alpha^4 & \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^4 & \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man die Determinanten des ersten Rechteckes durch Einschliessen der Indices in Klammer und die des zweiten Rechteckes durch Summenzeichen vor der Diagonalreihe, so ist die Entwicklung des Productes

$$= (012)\Sigma\pm x^4\alpha^3\beta^2+(013)\Sigma\pm x^4\alpha^3\beta+(014)\Sigma\pm x^4\alpha^3 1+(023)\Sigma\pm x^4\alpha^2\beta$$
$$+(024)\Sigma\pm x^4\alpha^2 1+(123)\Sigma\pm x^3\alpha^2\beta+(124)\Sigma\pm x^3\alpha^2 1+(034)\Sigma\pm x^4\alpha\, 1$$
$$+(134)\Sigma\pm x^3\alpha\, 1+(234)\Sigma\pm x^2\alpha 1$$

$$= \Delta(x\alpha\beta)\{(012)x^2\alpha^2\beta^2+(013)[\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-(x+\alpha+\beta)(\alpha+\beta)]x\alpha\beta$$
$$+(014)[(x+\alpha+\beta)(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\{x^2+\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+x(\alpha+\beta)\}]-$$
$$-(023)[(x+\alpha+\beta)x\alpha\beta]+(024)[(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)-(\alpha+\beta)\{x^2+\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+x(\alpha+\beta)\}]$$
$$+(123)x\alpha\beta+(124)[(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-(x+\alpha+\beta)(\alpha+\beta)]-(034)[x^2+\alpha^2+\beta^2+x(\alpha+\beta)]$$
$$-(134)(x+\alpha+\beta)+(234)\}$$

$$= \Delta(x\alpha\beta)\{[(012)\alpha^2\beta^2-(014)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-(024)(\alpha+\beta)-(034)-(013)\alpha\beta(\alpha+\beta)-(023)\alpha\beta]x^2$$
$$+[(013)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-(\alpha+\beta)^2\}\alpha\beta+(014)\{\alpha^3+\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\beta^3-(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\}$$
$$-(023)\{(\alpha+\beta)\alpha\beta-(024)(\alpha+\beta)^2+(123)\alpha\beta-(124)(\alpha+\beta)-(034)(\alpha+\beta)-(134)\}]x$$
$$+(014)\{(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)(\alpha+\beta)-(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2\}$$
$$+(024)\{(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)-(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\}$$
$$+(124)\{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2\}-(034)(\alpha^2+\beta^2)-(134)(\alpha+\beta)+(234)\}$$

80) $$= \Delta(x\alpha\beta)\{[(012)\mathfrak{a}_2^2-(014)(\mathfrak{a}_1^2-\mathfrak{a}_2)+(024)\mathfrak{a}_1+(013)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2-(023)\mathfrak{a}_2-(034)]x^2$$
$$+[-(013)\mathfrak{a}_2+(014)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2+(023)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2-(024)\mathfrak{a}_1^2+(123)\mathfrak{a}_2+\{(124)+(034)\}\mathfrak{a}_1-(134)]x$$
$$+[-(014)\mathfrak{a}_2^2+(024)\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2-(124)\mathfrak{a}_2-(034)(\mathfrak{a}_1^2-2\mathfrak{a}_2)+(134)\mathfrak{a}_1+(234)]\},$$

wo

$$\Delta(x\alpha\beta) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

ist und α, β die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + \mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{a}_2 = 0 \tag{81}$$

sind.

Setzt man in 80) den Ausdruck in der eckigen Klammer gleich Null und sind die Wurzeln der so entstehenden Gleichung x_1, x_2 so kann man, da bei einer Involution vollkommene Vertauschbarkeit herrscht, dieselben zu Grunde legen und die Elemente von 81) bestimmen. Die Gleichung lautet dann;

$$\begin{aligned}
&\{(012)x_1^2 x_2^2 - (014)(x_1+x_2)^2 + [(014)-(023)]x_1 x_2 + (024)(x_1+x_2) + (013)(x_1+x_2)x_1 x_2 - (034)\}x^2 \\
&+ \{-(013)x_1^2 x_2^2 + (014)(x_1+x_2)x_1 x_2 + (023)(x_1+x_2)x_1 x_2 - (024)(x_1+x_2)^2 + (123)x_1 x_2 + (124)(x_1+x_2) + \\
&\quad + (034)(x_1+x_2) - (134)\}x \\
&+ \{-(014)x_1 x_2 + (024)(x_1+x_2)x_1 x_2 - (124)x_1 x_2 - (034)[(x_1+x_2)^2 - 2x_1 x_2] + (134)(x_1+x_2) + (234)\} = 0
\end{aligned} \tag{82}$$

Ist nun

$$X_1 = x_1 + x_2$$
$$X_2 = x_1 x_2,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
X_1 &= \varphi_1(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) &&= \psi_1 : \psi_0 \\
X_2 &= \varphi_2(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) &&= \psi_2 : \psi_0
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_1 &= \varphi_1(X_1 X_2) \\
\mathfrak{a}_2 &= \varphi_2(X_1 X_2).
\end{aligned} \tag{84}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\varphi_1(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2), \varphi_2(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)) &= \mathfrak{a}_1 \\
\varphi_2(\varphi_1(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2), \varphi_2(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)) &= \mathfrak{a}_2.
\end{aligned} \tag{85}$$

Da nun über die $\mathfrak{a}_\iota$ nichts vorausgesetzt wurde, als dass sie symmetrisch aus zwei Grössen zusammengesetzt sind, so haben wir hier zwei rationale umkehrbare Substitutionen vor uns. Mit Hilfe der Identitäten 85) lässt sich beweisen, dass die Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2 sind, für beliebige $\mathfrak{a}_\iota$ nicht reducibel sein kann. Angenommen nämlich, dass die Gleichung reducibel wäre für alle $\mathfrak{a}$, so müsste

$$4\varphi_2(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) - \varphi_1(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^2 = X^2$$

für alle Grössen, die man für $\mathfrak{a}$ setzen mag. Setzt man aber

$$\mathfrak{a}_1 = \varphi_1(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$$
$$\mathfrak{a}_2 = \varphi_2(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$$

so bekommt man $4\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1^2 = X^2$, was nicht möglich ist.

Betrachten wir jetzt eine Involution zehnten Grades und fünfter Stufe

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 \ldots a_9 & a_{10} & x^{10} & x^9 \ldots x & 1 \\
b_0 & b_1 \ldots b_9 & b_{10} & \alpha^{10} & \alpha^9 \ldots \alpha & 1 \\
c_0 & c_1 \ldots c_9 & c_{10} & \beta^{10} & \beta^9 \ldots \beta & 1 \\
d_0 & d_1 \ldots d_9 & d_{10} & \gamma^{10} & \gamma^9 \ldots \gamma & 1 \\
e_0 & e_1 \ldots e_9 & e_{10} & i^{10} & i^9 \ldots i & 1
\end{vmatrix} = 0. \tag{86}$$

Sind $\alpha, \beta, \ldots$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$f = x^5 + \mathfrak{a}_1 x^4 + \mathfrak{a}_2 x^3 + \mathfrak{a}_3 x^2 + \mathfrak{a}_4 x + \mathfrak{a}_5 = 0,$$

so zerfällt die Involution in zwei Factoren, von denen der eine f ist und der andere die Form hat:

$$\Phi = \varphi_0(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_5) x^5 + \varphi_1(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5) x^4 + \ldots + \varphi_5(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5).$$

Sind die Wurzeln von $\Phi = 0$

$$x_1, x_2, \ldots x_5$$

und bestimmt man eine Gruppe der Involution durch diese Werthe, so zerfällt natürlich die Involution wiederum in

$$f \cdot \Phi,$$

aber f erscheint jetzt in der Form:

$$f = \varphi_0(X_1 \ldots X_5) x^5 + \varphi_1(X_1 \ldots X_5) x^4 + \ldots + \varphi_5(X_1 \ldots X_5),$$

wenn unter

$$X_1, X_2, \ldots X_5$$

die elementaren symmetrischen Functionen der x_i verstanden werden. Es folgt also unmittelbar

87) $$\begin{aligned} X_1 &= \psi_1(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5) \\ X_2 &= \psi_2(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_5 &= \psi_5(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5) \end{aligned}$$

88) $$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \psi_1(X_1 \ldots X_5) \\ \mathfrak{a}_2 &= \psi_2(X_1 \ldots X_5) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_5 &= \psi_5(X_1 \ldots X_5), \end{aligned}$$

wenn man

$$\varphi_1 : \varphi_0 = \psi_1, \; \varphi_2 : \varphi_0 = \psi_2, \ldots, \; \varphi_5 : \varphi_0 = \psi_5$$

setzt. Aus 87) und 88) folgen die Identitäten:

89) $$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \psi_1(\psi_1(\mathfrak{a}_1 \ldots) \ldots \psi_5(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5)) \\ \mathfrak{a}_2 &= \psi_2(\psi_1(\mathfrak{a}_1 \ldots) \ldots \psi_5(\mathfrak{a}_1 \ldots \quad)) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_5 &= \psi_5(\psi_1(\mathfrak{a}_1 \ldots) \ldots \psi_5(\mathfrak{a}_1 \ldots \quad)). \end{aligned}$$

Sieht man von der Involution ab und betrachtet 87) und 88) für sich, so kann man die

$$X_i \text{ und } \mathfrak{a}_i$$

als zwei fünffache Mannigfaltigkeiten auffassen, die sich gegenseitig entsprechen. Transformirt man nun beide gleichzeitig auf irgend eine Weise, so dass dieselben in

(06 $$\begin{aligned} X_1' &= \psi_1'(\mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_2' \ldots) \\ X_2' &= \psi_2'(\mathfrak{a}_1' \mathfrak{a}_2' \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_5' &= \psi_5'(\mathfrak{a}_1' \ldots \mathfrak{a}_5') \end{aligned}$$

91) $$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1' &= \psi_1'(X_1' \, X_2' \ldots) \\ \mathfrak{a}_2' &= \psi_2'(X_1' \, X_2' \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_5' &= \psi_5'(X_1' \, X_2' \ldots) \end{aligned}$$

übergehen, so müssen offenbar, wenn mittelst dieser Transformation bewirkt wird, dass

$$X'_1 = X'_2 = X'_3 = 0$$

wird, auch

$$\mathfrak{a}'_1,\ \mathfrak{a}'_2,\ \mathfrak{a}'_3$$

gleich Null sein, denn aus 91), welche jetzt lauten

$$\mathfrak{a}'_1 = \psi'_1(X'_4\ X'_5)$$
$$\mathfrak{a}'_2 = \psi'_2(X'_4\ X'_5)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{a}'_5 = \psi'_5(X'_4\ X'_5)$$

folgen 90), indem man die $\mathfrak{a}'_i$ mit den X'_i vertauscht, welche in Folge dessen die Gestalt haben

$$0 = \psi'_1(\mathfrak{a}'_4\ \mathfrak{a}'_5)$$
$$0 = \psi'_2(\mathfrak{a}'_4\ \mathfrak{a}'_5)$$
$$X'_4 = \psi'_4(\mathfrak{a}'_4\ \mathfrak{a}'_5)$$
$$\cdots\cdots$$
$$X'_5 = \psi'_5(\mathfrak{a}'_4\ \mathfrak{a}'_5).$$

Bildet man jetzt die Invariante C von

$$\Phi = \varphi_0(\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_5)x_1^5 + \varphi_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\ldots)x_1^4x_2 + \ldots + \varphi_5(\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_5)x_2^5,$$

so kann man dieselbe zum Verschwinden bringen, weil man offenbar die Determinanten aus dem Rechtecke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \ldots a_{10} \\ b_0 & b_1 \ldots b_{10} \\ \cdots & \cdots \\ \iota_0 & \iota_1 \ldots \iota_{10} \end{vmatrix}$$

immer so bestimmen kann, dass sie der Gleichung

$$C = 0$$

genügen. Ist dies geschehen, so kann man durch eine lineare Substitution die Form Φ auf die Gestalt

$$\Phi' = \frac{2}{3}A^2\zeta^5 - \frac{5}{6}B\zeta\eta^4 - \frac{B}{6}\eta^5$$

bringen.

Nach dem oben Gesagten müssen aber auch durch diese Transformation die Coëfficienten von

$$x_1^4x_2,\ x_1^3x_2^2,\ x_1^2x_2^3$$

in

$$f' = \varphi'_0(X'_1X'_2\ldots)x_1^5 + \varphi_1(X'_1X'_2\ldots)x_1^4x_2 + \ldots + \varphi_5(X'_1X'_2\ldots)x_2^5$$

verschwinden. Es wird daher auf diese Weise f auf die canonische Form

$$f = \frac{2}{3} A^2 \zeta^5 - \frac{5}{6} B' \zeta \eta^4 - \frac{B'}{6} \eta^5$$

gebracht werden.

A' und B' gehen aus A und B hervor, indem man statt

$$\mathfrak{a}_1, \ \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_5$$

$$\varphi_1(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5) : \varphi_0(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5), \ \varphi_2(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5) : \varphi_0(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_5).—$$

setzt.

Meine Untersuchungen in dieser Richtung sind zwar bis jetzt nicht weiter gediehen, allein ich glaube, dass man auf diesem Wege zur Durchführung der Jerrard'schen Transformation gelangen wird.